

Ankündigung: Seminar zur Algebra und Zahlentheorie – Quadratische Zahlkörper

Jun.-Prof. Dr. Tommy Hofmann Dr. Johannes Schmitt

Universität Siegen

Sommersemester 2024

Inhalt

Die Untersuchung von diophantischen Gleichungen ist ein klassisches Problem in der Zahlentheorie, welches Mathematiker bis heute beschäftigt. Ein typisches Beispiel hierfür ist die Bestimmung aller pythagoreischer Tripel, das heißt, aller Tripel $(x, y, z) \in \mathbf{Z}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$, welches sich mit elementaren Methoden vollbringen lässt. Ein anderes Beispiel ist die Bestimmung aller Tupel $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, welche die Gleichung $y^2 = x^3 - 2$ erfüllen. Dieses Problem wurde bereits vor 300 Jahren von Fermat und Euler untersucht. Obwohl es im Vergleich zu pythagoreischen Tripeln nur noch zwei Unbekannte gibt, erweist sich die Frage als wesentlich schwieriger und elementare Methoden reichen zur Lösung nicht mehr aus. Auf Euler geht die Idee zurück, die Gleichung in der Form

$$x^3 = y^2 + 2 = (y - \sqrt{-2})(y + \sqrt{-2})$$

zu schreiben und dann im Ring $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ zu arbeiten. Dies ist der sogenannte Ganzheitsring im Körper $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$. Das hier auftretende Objekt ist ein Beispiel für einen quadratischen Zahlkörper (welche allgemein von der Form $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ sind), deren Untersuchung Ziel des Seminar ist. Letztendlich werden wir sehen, wie die algebraische Theorie dieser Körper bzw. ihrer Teilringe uns ermöglicht, die Lösungen von $y^2 = x^3 - 2$ (und anderen Gleichungen) zu bestimmen.

Literatur

Wir werden ausgewählten Kapiteln von [2] und [1] folgen.

[1] Tommy Hofmann, *Quadratic number fields (lecture notes)*, 2017.

[2] Franz Lemmermeyer, *Quadratische Zahlkörper*, Berlin: Springer Spektrum, 2017.

Voraussetzung

Das Seminar richtet sich an alle Freunde der Algebra und Zahlentheorie und ist geeignet für die Hörer der Vorlesung Lineare Algebra I und II.

Termine

Bei Interesse bei Jun.-Prof. Dr. Hofmann (tommy.hofmann@uni-siegen.de) melden oder einfach persönlich vorbeikommen. Der Termin für die Vorträge ist Dienstag, 10 Uhr, ENC D-115, kann bei Bedarf aber auch angepasst werden.