Computeralgebra-Praktikum

Universität Siegen — WS 2017/2018
Mohamed Barakat — Abgabe bis Mi. 31.01.2017, 16:00 Uhr

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition. Seien $\mathtt{A} \in R^{r\times c}$ und $\mathtt{B} \in R^{r'\times c}$. Wir sagen $\mathtt{A}$ **dominiert** $\mathtt{B}$ **zeilenmäßig**, falls ein $\mathtt{X} \in R^{r'\times r}$ mit $\mathtt{B} = \mathtt{XA}$ existiert (wir schreiben $\mathtt{A} \geq_{\mathrm{row}} \mathtt{B}$).

Definition. Sei $\mathtt{A} \in R^{r\times c}$ eine Matrix über R. Eine Matrix $\mathtt{S} \in R^{a\times r}$ heißt **Zeilen-Syzygienmatrix von** $\mathtt{A}$, falls gilt

- $\mathtt{SA} = 0$;
- $\mathtt{S}$ dominiert jede andere Matrix $\mathtt{S}' \in R^{a'\times r}$ zeilenmäßig, die $\mathtt{S}'\mathtt{A} = 0$ genügt.

Aufgabe 5. Sei $R \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$. Programmiere folgende Algorithmen:

- `decide_zero_rows`$(\mathtt{B}, \mathtt{A})$ die entscheidet, ob $\mathtt{A} \geq_{\mathrm{row}} \mathtt{B}$, d.h. ob eine Lösungsmatrix $\mathtt{X}$ mit $\mathtt{XA} = \mathtt{B}$ existiert: Der Algorithmus gibt eine Matrix $\mathtt{B}'$ zurück (mit denselben Dimensionen wie $\mathtt{B}$), für die die Gleichung $\mathtt{XA} = \mathtt{B} - \mathtt{B}'$ lösbar ist und wo die i-te Zeile $\mathtt{B}'_i$ genau dann verschwindet, wenn die Gleichung $\mathtt{xA} = \mathtt{B}_i$ lösbar ist. Insbesondere gilt, die Gleichung $\mathtt{XA} = \mathtt{B}$ ist genau dann lösbar, wenn `decide_zero_rows`$(\mathtt{B}, \mathtt{A}) = \mathtt{0}$;
- `decide_zero_rows_effectively`$(\mathtt{B}, \mathtt{A})$ berechnet eine Matrix $\mathtt{T}$, die $\mathtt{B} + \mathtt{TA} = \mathtt{B}'$ mit $\mathtt{B}' =$ `decide_zero_rows`$(\mathtt{B}, \mathtt{A})$ erfüllt. Insbesondere gilt: Falls die Gleichung $\mathtt{XA} = \mathtt{B}$ lösbar ist, dann ist
$$\mathtt{X} := -\mathtt{T} =: \mathtt{right\_divide}(\mathtt{B}, \mathtt{A});$$
- `syzygies_of_rows`$(\mathtt{A})$ die eine Zeilen-Syzygienmatrix $\mathtt{S}$ von von $\mathtt{A}$ berechnet.

Hinweis: Wende `strictly_normalize_matrix` auf $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathtt{B} & 0 \\ 0 & \mathtt{A} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ an und erhalte $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathtt{B}' & -\mathtt{X} \\ 0 & \mathtt{A}' & \mathtt{Y} \\ 0 & 0 & \mathtt{S} \end{smallmatrix}\right)$. Die letzte Matrix ist offensichtlich das Produkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mathtt{X} \\ 0 & \mathtt{Y} \\ 0 & \mathtt{S} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathtt{B} & 0 \\ 0 & \mathtt{A} & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathtt{B}' & -\mathtt{X} \\ 0 & \mathtt{A}' & \mathtt{Y} \\ 0 & 0 & \mathtt{S} \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\mathtt{B}' = \mathtt{B} - \mathtt{XA}$ und das Gleichungssystem $\mathtt{XA} = \mathtt{B}$ ist genau dann lösbar (mit Lösung $\mathtt{X}$), wenn $\mathtt{B}'$ verschwindet. Wir erhalten die Algorithmen $\mathtt{B}' =$ `decide_zero_rows`$(\mathtt{B}, \mathtt{A})$ und $(\mathtt{B}', -\mathtt{X}) =$ `decide_zero_rows_effectively`$(\mathtt{B}, \mathtt{A})$. Die Matrix $\mathtt{S}$ ist eine Zeilen-Syzygienmatrix und wir erhalten den Algorithmus $\mathtt{S} =$ `syzygies_of_rows`$(\mathtt{A})$.