Algebra - WS 2016/17

UNIVERSITÄT SIEGEN

Übungsblatt 12

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche

Aufgabe 1. (Schiefkörper. 4 Punkte.)
Beweise Beispiel 4.32 aus der Vorlesung: Sei D ein Schiefkörper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige:

1. Der (volle) Matrixring $R := D^{n\times n}$ ist (als Ring) einfach.
2. $D^{n\times 1}$ ist ein einfacher R-Linksmodul.
3. Der reguläre R-Modul ${}_RR$ ist genau dann einfach, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 2. (R-Moduln. 4 Punkte.)
Beweise Bemerkung 4.35 aus der Vorlesung: Es sei R ein Ring und $M_1, \ldots, M_r, N_1, \ldots, N_s$ R-Moduln. Dann gilt:

1. Es ist
$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i=1}^{r} M_i, \bigoplus_{j=1}^{s} N_j\right) \cong \left\{\left(\phi_{i,j}\right)_{i,j} \mid \phi_{i,j} \in \mathrm{Hom}_R\left(M_i, N_j\right), (i,j) \in \underline{r} \times \underline{s}\right\}$$
ein Isomorphismus abelscher Gruppen.
2. Ist M ein R-Modul und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist $\mathrm{End}_R\left(M^n\right) \cong \mathrm{End}_R\left(M\right)^{n\times n}$ als Ringe.

Aufgabe 3. (Artinsche Ringe. 4 Punkte.)
Beweise Beispiel 4.33 aus der Vorlesung: Ein ringdirektes Produkt von Matrixringen über Schiefkörpern ist halbeinfach.

Aufgabe 4. (Halbeinfache Moduln. 4 Punkte.)

1. Welche der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln ist halbeinfach?
$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$
2. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halbeinfach genau dann, wenn n quadratfrei ist.
3. Beiweise Beispiel 4.30.2 aus der Vorlesung: Sei K ein Körper, $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, und $\varphi \in \mathrm{End}_K\left(\mathcal{V}\right)$. Dann ist $\mathcal{V}$ vermöge
$$K[x] \to \mathrm{End}_K\left(\mathcal{V}\right),\ x \mapsto \varphi$$
ein $K[x]$-Modul, der genau dann halbeinfach ist, wenn das Minimalpolynom von φ quadratfrei ist.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 25.01.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.