

Übungsblatt 05

PROF. DR. MOHAMED BARAKAT, SEBASTIAN GUTSCHE

Aufgabe 1. (Sylowsätze. 6 Punkte.)

1. Zeige: Jede Gruppe der Ordnung 132 besitzt eine normale Sylow-Untergruppe.
2. Zeige: Normalteiler sind disjunkte Vereinigungen von Konjugiertenklassen von Elementen.
3. Zeige: Es existiert eine einfache Gruppe der Ordnung 60.
Hinweis: Die Gruppe ist die A_5 . Betrachte mögliche Kardinalitäten für Normalteiler. Benutze Teil 2 dieser Aufgabe.
4. Sei G eine Gruppe, p prim, $n \in \mathbb{N}$, $n < p$ und $|G| = p^\alpha n$ mit $\alpha \geq 1$. Zeige:
$$|\text{Syl}_p(G)| = 1.$$

Aufgabe 2. (Lemma von Burnside. 4 Punkte.)

Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$.

1. Wie viele verschiedene Halsketten mit p Perlen und n Farben gibt es?
2. Folgere aus 1 die Kongruenz

$$n^p \equiv n \pmod{p}$$

Aufgabe 3. (Tetraeder. 4 Punkte.)

Wir interpretieren die Operationen von $A_4 = \langle (1, 2, 3), (2, 3, 4) \rangle$ bzw. S_4 auf $\underline{4}$ als eine Operation auf den Eckpunkten eines regelmäßigen Tetraeders.

1. Bestimme die Bahnen und für jede Bahn einen Stabilisator der Operation auf den Ecken, den Kanten, und den ungeordneten Paaren von Kanten.
2. Zeige, dass im Fall der A_4 alle echten Untergruppen als Stabilisatoren dieser Operation vorkommen.
3. Zu welcher der obigen Operationen ist die Operation von A_4 bzw. S_4 auf den Flächen ähnlich.

Aufgabe 4. (Klassifikation von Abbildungen. 4 Punkte.)

Die symmetrische Gruppe (S_n, \cdot) operiert auf \underline{n}^n durch rechts-Konjugation und auf $\text{Pot}(\underline{n}^2)$ durch Anwenden von rechts.

1. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : \underline{n}^n \rightarrow \text{Pot}(\underline{n}^2), \quad f \mapsto \{(i, f(i)) \mid i \in \underline{n}\}$$

injektiv und S_n -äquivariant ist.

2. Bestimme ein Vertretersystem der Bahnen und die Länge der Bahnen für $n = 4$.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 23.11.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.