Algebra - WS 2016/17

Übungsblatt 04

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche

Aufgabe 1. (Normale Körpererweiterung. 3 Punkte.)

1. Zeige: Endliche Körper sind normal über ihrem Primkörper.
2. Folgere: Endliche Körper sind normal über jedem Zwischenkörper.

Aufgabe 2. (Rechts- und Linksmultiplikation. 2 Punkte.)
Sei M eine Menge. Zeige:

$$(S_M, \circ) \cong (S_M, \cdot)\,.$$

Aufgabe 3. (Isomorphiesatz. 2 Bonuspunkte.)
Zeige den zweiten Noetherschen Isomorphiesatz: Sei G eine Gruppe, H ein Normalteiler von G, und $N \leq H$ ebenfalls ein Normalteiler von G. Dann gilt

$$(G/N)\,/\,(H/N) \cong (G/H)\,.$$

Aufgabe 4. (Links- und Rechtsoperationen. 5 Punkte.)
Sei G eine Gruppe.

1. Zeige: Jede links G-Menge definiert einen Homomorphismus $\phi_M : G \to (S_M, \circ)$.
2. Sei M eine Menge und $\phi_M : G \to (S_M, \circ)$ ein Homomorphismus. Zeige, dass dann M eine links G-Menge ist.
3. Zeige: Die beiden Zuordnungen sind invers zueinander.
4. Zeige 1.-3. für rechts G-Mengen und $(S_M, \cdot)$.
5. Zeige: Jede Linksoperation definiert eine Rechtsoperation und umgekehrt. Die Zuordnungen sind invers zueinander.

Aufgabe 5. (Zykel. 4 Punkte.)
Sei M eine endliche Menge und alle Zykel aus $(S_M, \cdot)$. Sei weiterhin $G = (S_{10}, \cdot)$.

1. Ist $(1,2,3,6,7,8) = (3,6,7,8,1,2) \in G$?
2. Zeige: Zwei Zykel sind genau dann gleich, wenn sie durch zyklische Vertauschung der Einträge auseinander hervorgehen, d.h., $((m_1, \ldots, m_n) = (l_1, \ldots, l_n)$ genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $m_i = l_{i+k \bmod n}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
3. Sei $\pi_1 := (1,2,3,4)$, $\pi_2 := (5,8,9) \in G$. Gilt $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$?
4. Zwei Zykel $\pi_1 := (m_1, \ldots, m_n)$ und $\pi_2 := (l_1, \ldots, l_k)$ heißen disjunkt, wenn $\{m_1, \ldots, m_n\} \cap \{l_1, \ldots, l_k\} = \varnothing$. Zeige: Disjunkte Zykel kommutieren.
5. Schreibe $(1,2)(3,4)(4,3)(1,7)(6,3)(1,2,3,4)$ als Produkt disjukter Zykel.
6. Zeige: Jedes Element von S_M lässt sich durch ein bis auf Reihenfolge eindeutiges Produkt disjunkter Zykel darstellen.
7. Schreibe $(1,2)(3,4)(4,3)(1,7)(6,3)(1,2,3,4)$ als Produkt von 2-Zykeln.
8. Zeige: Jedes Element von S_M lässt sich als Produkt von 2-Zykeln schreiben. Die Anzahl dieser Zykel ist eindeutig bestimmt modulo $2\mathbb{Z}$.
9. Sei $\pi := (1,2,3,4)$. Berechne $\pi^{-1}(2,4,6,8)\pi$.
10. Zeige: Für $\pi \in S_M$ gilt $\pi^{-1}(m_1, \ldots, m_n)\,\pi = ((m_1)\pi, \ldots, (m_n)\pi)$.

Aufgabe 6. (Transitive G-Mengen. 4 Punkte.)
Klassifiziere alle transitiven A_4-Mengen.
Hinweis: Die A_4 hat 5 Konjugiertenklassen von Untergruppen und wird erzeugt von $(1,2,3)$ und $(2,3,4)$.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 16.11.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.