Lineare Algebra II - SS 2016

Übungsblatt 14

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche, Sebastian Posur

Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge M operiert. Weiter sei Ω eine Menge. Eine Abbildung

$$\mathcal{I} : M \to \Omega$$

heißt **trennende Invariante** der Operation von G auf M, falls für alle $m, n \in M$ gilt:

$$Gm = Gn \;\Leftrightarrow\; \mathcal{I}(m) = \mathcal{I}(n).$$

Aufgabe 1. (Euklidischer Algorithmus. 4 Bonuspunkte.)
Es operiere $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ durch Anwenden auf $\mathbb{Z}^{2\times 1}$. Zeige, dass

$$\gamma \colon \mathbb{Z}^{2\times 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \colon \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } a = b = 0, \\ \mathrm{ggT}(a, b), & \text{sonst} \end{cases}$$

eine trennende Invariante ist.

Aufgabe 2. (Operation. 4 Bonuspunkte.)

1. Sei M eine Menge und S_M die symmetrische Gruppe auf M. Zeige, dass

$$\omega : \; S_M \times M^M \to M^M, \; (f, g) \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$$

   eine Operation ist.

2. Bestimme die Bahnen für $M = \underline{3}$ und $G = S_3$.

Aufgabe 3. (Gaußsche Binomialkoeffizienten. 4 Bonuspunkte.)
Betrachte die Menge

$$\mathcal{U}(\mathbb{F}_q^{n\times 1}, \mathbb{F}_q) := \{X \mid X \leq_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^{n\times 1}\}$$

der $\mathbb{F}_q$-Teilräume von $\mathbb{F}_q^{n\times 1}$ bzw. die Teilmenge $\mathcal{U}_k(\mathbb{F}_q^{n\times 1}, \mathbb{F}_q)$ der k-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{F}_q^{n\times 1}$. Zeige:

$$|\mathcal{U}_k(\mathbb{F}_q^{n\times 1}, \mathbb{F}_q)| = \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_q)| \cdot |\mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{F}_q)| \cdot q^{k(n-k)}} =: \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

Aufgabe 4. (Konjugationsoperation. 4 Bonuspunkte.) $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ operiere auf $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$ durch Konjugation. Bestimme ein Vertretersystem und die Längen der Bahnen.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 20.07.2016, 15:00 Uhr in den Kasten zur Linearen Algebra II (ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D) ein.